ÖVNING 1 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Kap 2.1 Integrerande faktor

En *första gradens differentialekvation* är en ekvation på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)\,. \tag{1}$$

En första gradens differentialekvation som har formen

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y + g(t)$$

kallas för *linjär*. En funktion $\mu(t)$ sådan att

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)) = p(t)\mu(t)$$

kallas för en *integrerande faktor*.

Boyce–DiPrima 2.1.14. Lös följande initialvärdesproblem:

$$y' + 3y = te^{-3t}, \qquad y(1) = 0\,.$$

Lösning. Låt $\mu(t) = e^{3t}$. Då gäller att

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mu(t)y) &= \mu(t)y' + \mu'(t)y \\ &= e^{3t}y' + 3e^{3t}y \\ &= e^{3t}(y' + 3y) \\ &= e^{3t}te^{-3t} \\ &= t\,.\end{aligned}$$

Om vi integrerar med avseende på t får vi då att $\mu(t)y = At^2/2 + B$ där B är en konstant, dvs

$$y = e^{-3t}(t^2/2 + C)\,,$$

där C är en okänd konstant. Initialvärdet ger nu att $e^{-3}(1/2+C)=0$, dvs $C=-1/2$. Dvs

$$y=\frac{e^{-3t}}{2}(t^2-1)\,.$$

2. Kap 2.2 Separabla ekvationer

En differentialekvation kallas för *separabel* om den kan skrivas på formen

$$M(x)+N(t)\frac{dy}{dt}=0\,.$$

Boyce–DiPrima 2.2.6. Lös följande differentialekvation:

$$xy'=(1-y^2)^{1/2}\,.$$

Lösning. Ekvationen är separabel och vi kan skriva

$$(1-y^2)^{-1/2}dy=x^{-1}dx\,.$$

Om vi integrarar på båda sidor får vi ekvationen $\sin^{-1}(y)=\ln(x)+C$, dvs

$$y=\sin(\ln(x)+C)\,.$$

3. Kap 2.4 Linjära/Icke linjära ekvationer

Boyce–DiPrima 2.4.3. Givet initialvärdesproblemet

$$y'+\tan(t)y=\sin(t), \qquad y(2\pi)=0\,, \tag{2}$$

bestäm utan att lösa problemet ett intervall i vilket (2) har en (unik) lösning.

Lösning. Enligt [BD13, Theorem 2.4.1] räcker det att hitta ett öppet intervall som innehåller $t=2\pi$ och där både $\sin(t)$ och $\tan(t)$ är kontinuerliga. Ett sådant intervall är $(3\pi/2, 5\pi/2)$.

Boyce–DiPrima 2.4.11. Givet differentialekvation

$$y'=\frac{2+t^3}{3y-y^2}\,, \tag{3}$$

bestäm utan att lösa problemet var i ty-planet (3) har en lösning.

Lösning. Enligt [BD13, Theorem 2.4.2] måste vi hitta ett öppet område i vilket $f(t,y)=(2+t^3)/(3y-y^2)$ och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga. Vi har att $(3y-y^2)=y(3-y)$ och

$$\frac{\partial f}{\partial y}=(2+t^3)\frac{2y-3}{(3y-y^2)^2}\,.$$

Dvs f och $\partial f/\partial y$ är kontinuerliga då $y\neq 0$ och $y\neq 3$.

4. Kap 2.5 Populationsdynamik

En differentialekvation på formen

$$\frac{dy}{dt}=f(y) \tag{4}$$

kallas för *autonom.* Ett y sådant att $f(y)=0$ kallas för en *kritisk punkt* eller *jämviktslösning.*

En kritisk punkt $y=y_0$ till (4) kallas för *stabil* (*stabil lösning*, *stabil jämviktslösning*) om det för varje $\varepsilon>0$ existerar ett $\delta>0$ så att för varje lösning $y=g(t)$

till ekvationen (4) som uppfyller $|g(0) - y_0| < \delta$, gäller att $|g(t) - y_0| < \varepsilon$ för all $t \geq 0$. En kritisk punkt som ej är stabil kallas för *instabil*.

En kritisk punkt $y = y_0$ till (4) kallas för *asymptotiskt stabil*, om den är stabil och det existerar ett $\delta_0 > 0$ så att om en lösning $y = g(t)$ till (4) uppfyller $|g(0)-y_0| < \delta_0$ så gäller att

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = y_0 \,.$$

Exempel 4.1. Ett (tråkigt) exempel på när stabilitet är uppfyllt men inte asymptotisk stabilitet, är om vi tittar på differential ekvationen $dy/dt = 0$. Då är alla punkter stabila kritiska punkter men ingen är asymptotiskt stabil.

Boyce–DiPrima 2.5.2. Givet ekvationen

$$\frac{dy}{dt} = ay + by^2 \,,$$

där $a > 0$ och $b > 0$, skissa grafen för $\partial y/\partial t$ som funktion av y. Hitta kritiska punkter och bestäm om de är stabila, asymptotiskt stabila eller instabila.

Lösning. Vi har att $ay + by^2 = y(a + by)$ dvs kritiska punkter $y = 0$ and $y = -a/b$. Derivatan är positiv för $y > 0$, negativ för $-a/b < y < 0$ och positiv för $y < -a/b$. Dvs $y = 0$ är en instabil kritisk punkt och $y = -a/b$ är en stabil kritisk punkt.

OBS! Kom ihåg strömningslinjerna ALLTID ska möta linjen för en jämviktslösning tangentiellt!

5. Kap 2.6 Exakta differentialekvationer

En differentialekvation på formen

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{5}$$

kallas för *exakt* om det existerar en funktion ψ av t och y sådan att

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = M(t, y) \,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = N(t, y)$$

och sådan att varje ekvation $\psi(t, y) = C$ (C konstant) definierar y implicit som en deriverbar funktion av t. Om detta inträffar kan ekvationen skrivas på formen

$$\frac{d}{dt}(\psi(t, y(t))) = 0 \,.$$

Om funktionerna $M, N, \partial M/\partial y, \partial N\partial t$ är kontinuerliga i ett öppet, enkelt sammanhängande område R (t.ex. en öppen rektangel $R = \{(a, b) : a_0 < a < a_1, b_0 < b < b_1\}$), så gäller att

$$\text{(5) exakt ekvation i } R \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \text{ för alla punkter i } R$$

(se [BD13, Theorem 2.6.1]).

Boyce–DiPrima 2.6.4. Bestäm om ekvationen

$$(4xy^2 + 4y) + (4x^2y + 4x)y' = 0$$

är exakt eller ej.

Lösning. Välj $\psi(x, y) = 2x^2y^2 + 4xy$.

6. Kap 2.8 Existens- och Unikhetssats (Successiv Approximering)

Boyce–DiPrima 2.8.4. Använd successiv approximering för att lösa initialvärdesproblemet

$$y' = -y - 2, \qquad y(0) = 0\,.$$

Lösning. Integralfunktionen är

$$\phi(t) = \int_0^t (-\phi(s) - 2)ds\,.$$

För att uppfylla initialvärdet så väljer vi initailapproximation $\phi_0(t) = 0$. Vi itererar enligt formeln

$$\phi_n(t) = \int_0^t (-\phi_{n-1}(s) - 2)ds\,,$$

vilket ger

$$\phi_n(t) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-t)^k}{k!}$$

(övertyga dig om detta genom att kolla att det stämmer upp till t.ex. $n = 3$. För att bevisa det strikt använder du sedan induktion, dvs antag att det stämmer för $n \leq N$ och visa att det då också stämmer för $n = N + 1$). Om vi uttrycker e^{-t} som en potensserie ser vi nu att

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 2(e^{-t} - 1)\,.$$

Vi får alltså lösningen $y = 2(e^{-t} - 1)$ (kolla att detta stämmer genom att sätta in i differentialekvationen eller genom att lösa differentialekvationen med en annan metod, t.ex. integrerande faktor).

7. Kap 3.1 Homogena ekvationer med konstanta koefficienter

En *andra gradens differentialekvation* är en ekvation på formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, dy/dt)\,. \tag{6}$$

En andra gradens differentialekvation som har formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y + g(t) \tag{7}$$

kallas för *linjär*. Om vi har att $g(t) = 0$ för alla t så kallas ekvationen (7) för *homogen.*

En homogen ekvation där funktionerna $p = b$ och $q = c$ är konstanta kan lösas genom att anta att lösningarna ska ha formen $y = Ae^{rt}$ där A är en nollskiljd konstant. Då kan ekvationen skrivas om som

$$(r^2 + br + c)Ae^{rt} = 0\,.$$

Det räcker alltså att lösa ekvationen

$$r^2 + br + c = 0$$

vilken kallas för den *karaktäristiska ekvationen.*

Boyce–DiPrima 3.1.14. Lös initialvärdesproblemet

$$2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2\,.$$

Lösning. Vi söker efter lösningar på formen $y = Ae^{rt}$ $(A \neq 0)$. Om vi delar ekvationen med 2 ser vi då att den blir

$$(r^2 + r/2 - 2)Ae^{rt} = 0$$

och det återstår att lösa ekvationen

$$r^2 - r/2 - 2 = 0\,.$$

Rötterna ges av

$$r_1 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}, \quad \text{och} \quad r_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\,,$$

och den allmänna lösningen ges av

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\,,$$

där C_1 och C_2 är konstanter. Det återstår att bestämma C_1 och C_2 så att lösningen uppfyller initialvärdena.

Vi får av $y(0) = 0$ att $C_1 + C_2 = 0$ och av $y'(0) = 2$ att $r_1 C_1 + r_2 C_2 = 2$. Detta ekvationssystem kan skrivas på matrisform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Om vi löser systemet får vi att $C_1 = -4/\sqrt{33}$ och $C_2 = 4/\sqrt{33}$.

8. Kap 3.2 Superpositionsprincipen och Wronskianen

Två lösningar $y_1(t)$ och $y_2(t)$ till en andra gradens linjär homogen differentialekvation sägs bilda en *fullständig lösningsmängd* om alla lösningar till ekvationen kan uttryckas som

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

för något val av konstanter C_1 och C_2.

Boyce–DiPrima 3.2.26. Kolla att $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = xe^x$ är lösningar till problemet

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0$$

och bestäm om de bildar en fullständig lösningsmängd.

Lösning. Kolla själv att y_1 och y_2 är lösningar. För att se att y_1 och y_2 bildar en fullständing lösningsmängd tittar vi på Wronskianen

$$\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x^2 e^x\,,$$

vilken är skiljd från noll då $x > 0$. Dvs y_1 och y_2 bildar en fullständig lösningsmängd.

References

[BD13] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 2013.