ÖVNING 3 - DIFFTRANS DEL 2

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Konvergens av FS

Vretblad 4.13. Hitta Fourierserien till $f(t) = |\cos(t)|$. Visa att serien konvergerar likformigt till f och beräkna

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}\,.$$

Lösning. Funktionen f är jämn och vi har Fourierkoefficienter

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(t)|\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi}^{-\pi/2} - \int_{\pi/2}^{\pi}\right)\,. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$a_n = \begin{cases} \frac{4(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)\pi} & \text{om } n = 2k \text{ jämn} \\ 0 & \text{om } n \text{ udda}\,. \end{cases}$$

Därför har vi

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(4n^2-1)\pi}\cos(nt)\,.$$

Vi har att

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n^2-1)\pi} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,.$$

Eftersom den sista serien är konvergent så är även den första serien det. Sats 4.2 ger då att f konvergerar likformigt till $f(t)$.

Vi har att $|\cos(0)| = 1$. Enligt ovan har vi då att

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

och vi får att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{2-\pi}{4}\,.$$

2. Komplexa vektorrum

Vretblad 5.3. Betrakta $C(0,1)$ som ett vectorrum över $\mathbb{C}$ (de komplexa talen). Är elementen

$$1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n,\ \cos x,\ \sin x,\ e^x \in C(0,1)$$

linjärt oberoende?

Lösning. Antag att

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_s \sin x + a_c \cos x + a_e e^x = 0$$

som element i $C(0,1)$ (dvs $= 0$ för alla $x \in (0,1)$). Notera att vi behöver $n+4$ stycken oberoende ekvationer i $a_0, \ldots, a_n, a_s, a_c, a_e$ för att bestämma dessa. Eftersom $(0,1)$ inehäller oändligt många punkter kan vi välja $n+4$ punkter som ger $n+4$ oberoende ekvationer. Eftersom funktionerna $1, x, \ldots, x^n, \cos x, \sin x, e^x$ alla är definierade och C^∞ (deriverbara oändligt många gånger) på hela $\mathbb{R}$ betyder detta att

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + a_s \sin x + a_c \cos x + a_e e^x = 0$$

i $C(\mathbb{R})$.

Eftersom $e^x >> 1, x, \ldots, x^n, \cos x, \sin x$ för stora x ser vi att $a_e = 0$ och på samma sätt är $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$. Välj nu $x = 0$ och $x = \pi/2$ för att få två ekvationer

$$\begin{aligned} a_0 + a_c &= 0 \\ a_0 + a_s &= 0 \,. \end{aligned}$$

Detta ger nu att $a_0(1 - \cos x - \sin x) = 0$ för alla x, dvs $a_0 = 0$.

Vretblad 5.4. Använd Gram-Schmidts metod för att hitta en ortogonal bas till det delrum av $C(0,1)$ som genereras av $1, x, x^2$.

Lösning. (1) Välj $v_0 = 1$ som första basvektorn. Denna har längd 1 eftersom $\int_0^1 1 \cdot 1 dt = 1$.

(2)

(i) Sätt

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= x - \langle x, v_0 \rangle v_0 \\ &= x - \int_0^1 x dx \\ &= x - \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

Observera att v_0 och $\tilde{v}_1$ är ortogonala eftersom

$$\begin{aligned} \langle v_0, v_1 \rangle &= \int_0^1 (x - 1/2) dx \\ &= 1/2 - 1/2 \\ &= 0 \,. \end{aligned}$$

(ii) Vi har $||\tilde{v}_1||^2 = \int_0^1 (x-1/2)^2 dx = \frac{1}{12}$ och väljer därför den andra basvektorn som

$$v_1 = \frac{\tilde{v}_1}{||\tilde{v}_1||} = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right) \,.$$

(3)

(i) Sätt

$$\begin{aligned}\tilde{v}_2 &= x^2 - \langle x^2, v_1\rangle v_1 - \langle x^2, v_0\rangle v_0\\ &= x^2 - 12(x-1/2)\int_0^1 (x^3 - x^2/2)dx - \int_0^1 x^2 dx\\ &= x^2 - x + \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Kontrollera själv att $\langle \tilde{v}_2, v_1\rangle = \langle \tilde{v}_2, v_0\rangle = 0$.

(ii) Vi har $||\tilde{v}_2||^2 = \int_0^1 (x^2 - x + 1/6)^2 dx = \frac{1}{180}$ och väljer därför den tredje basvektorn som

$$v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{||\tilde{v}_2||} = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right).$$

En ortogonal bas ges då av

$$1,\ \sqrt{12}(x-1/2),\ \sqrt{180}(x^2 - x + 1/6)\,.$$

3. Ortogonala projektioner

Vretblad 5.7. Hitta det polynom p av grad ≤ 1 som minimerar integralen

$$\int_0^2 |e^x - p(x)|^2 dx\,.$$

Lösning. Vi har ett vektorrum med inre produkt

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)\overline{g(x)}dx$$

och vill hitta kortaste "avståndet" $||e^x - p(x)||$ från punkten e^x till det delrum V som spänns upp av polynom av grad ≤ 1. Detta gör vi genom att välja $p(x)$ som projektionen av e^x på V. För att göra detta vill vi först hitta en ortonormal bas för V. Detta görs på samma sätt som i uppgift 5.4: Välj $\tilde{v}_1 = 1$. Denna vektor har norm $\sqrt{2}$ och vi väljer därför $v_1 = 1/\sqrt{2}$. Vi väljer

$$\begin{aligned}\tilde{v}_2 &= x - \langle x, v_1\rangle v_1\\ &= x - \frac{1}{2}\int_0^2 x dx\\ &= x - 1\,.\end{aligned}$$

Denna vektor har norm $\sqrt{2/3}$ och vi väljer därför

$$v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1)\,.$$

Projektionen av e^x på V ges nu av

$$\begin{aligned}\langle e^x, v_1\rangle v_1 + \langle e^x, v_2\rangle v_2 &= \int_0^2 (xe^x - e^x)dx \cdot \frac{3}{2}(x-1) + \int_0^2 e^x dx \cdot \frac{1}{2}\\ &= 3x - \frac{1}{2}(e^2 - 7)\,.\end{aligned}$$

Detta följer av att

$$xe^x = \frac{d}{dx}(xe^x) - e^x\,.$$

Vretblad 5.9. Hitta det polynom p av grad ≤ 2 som minimerar integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin x - p(x)|^2 \cos x dx\,.$$

Lösning. Gör precis som i uppgift 5.7. Dvs använd Gram-Schmidts metod för att hitta en ortonormal bas till det delrum som spänns upp av $1, x, x^2$. En sådan bas ges av

$$1/\sqrt{2},\ \alpha x,\ \beta\left(x^2 - \frac{1}{2\alpha^2}\right)$$

där

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 - 8}} \quad \text{och} \quad \beta = (2\pi^2 - 8)^{-1/2}\,.$$

Det sökta polynomet ges då av

$$p(x) = \langle \sin x, v_1\rangle v_1 + \langle \sin x, v_2\rangle v_2 + \langle \sin x, v_3\rangle v_3$$

men eftersom $\sin x \cos x$ och $x^2 \sin x \cos x$ är udda funktioner så är

$$\langle \sin x, v_1\rangle v_1 = \langle \sin x, v_3\rangle v_3 = 0\,.$$

Därför har vi

$$\begin{aligned} p(x) &= \langle \sin x, v_2\rangle v_2 \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x \cos x dx \cdot \alpha^2 x \\ &= \frac{\pi}{2\pi^2 - 16} x\,. \end{aligned}$$

4. Fouriersystemet är komplett

Vretblad 5.14. Använd resultatet i uppgift 4.13 för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,.$$

Lösning. Låt $f(t) = |\cos t|$ som i uppgift 4.13. Då ger Parsevals formel at

$$||f||^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

(här är det lätt att tro att det ska vara $4/\pi^2$ istället för $8/\pi^2$ men notera att ON-systemet är $1/\sqrt{2},\ \cos t,\ \cos 2t, \dots$). Om vi beräknar $||f||$ med inre produkten får vi

$$||f|| = 1$$

och därmed

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{16}(\pi^2 - 8)\,.$$