ÖVNING 4 - DIFFTRANS DEL 2

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Fouriersystemet är komplett

Vretblad 5.14. Använd resultatet i uppgift 4.13 för att beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} \,.$$

Lösning. Låt $f(t) = |\cos t|$ som i uppgift 4.13. Vi beräknade dess Fourierserie:

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos(nt) \,.$$

Enligt [Vre03, Theorem 5.8] så är systemet $\{\cos(nt), n \geq 0; \sin(nt), n \geq 1\}$ fullständigt i $L^2(\mathbb{T})$ och enligt [Vre03, Theorem 5.4] så gäller *Parsevals formel (fullständighetsrelationen)*. Denna säger i detta fall att

$$||f||^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

(här är det lätt att tro att det ska vara $4/\pi^2$ istället för $8/\pi^2$ men notera att ON-systemet är $1/\sqrt{2},\ \cos t,\ \cos 2t, \ldots$). Om vi beräknar $||f||$ med inre produkten får vi

$$||f|| = 1$$

vilket följer av att

$$\begin{aligned}\cos^2(nt) &= ((e^{int} + e^{-int})/2)^2 \\ &= (e^{2int} + e^{-2int} + 2)/4 \\ &= (\cos(2nt) + 1)/2\end{aligned}$$

och därmed får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{1}{16}(\pi^2 - 8) \,.$$

2. Approximation av polynom

Sats 2.1 (Weierstrass)**.** *Låt $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion där $[a,b]$ är ett kompakt intervall i $\mathbb{R}$. För varje $\varepsilon > 0$ så existser ett polynom $p(x)$ sådant att*

$$|p(\alpha) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

för alla $\alpha \in [a,b]$.

Vretblad 5.18 a). Hitta bästa approximationen i $L^2(-1,1)$ med polynom av grad ≤ 3 till stegfunktionen $H(x)$.

Lösning. Inre produkten ges här av

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx\,.$$

Som vanligt vill vi hitta en ortogonal (eller orto*normal*) bas till det delrum som spänns upp av alla polynom av grad ≤ 3.

(1) Välj $\tilde{v}_1 = 1$. Vi har $||\tilde{v}_1||^2 = 2$ och väljer $v_1 = 1/\sqrt{2}$.
(2) Välj $\tilde{v}_2 = x - \langle x, v_1\rangle v_1 = x$ eftersom x är udda. Vi har $||\tilde{v}_2||^2 = 2/3$ och väljer därför $v_2 = \sqrt{3/2}x$.
(3) Välj $\tilde{v}_3 = x^2 - \langle x^2, v_2\rangle v_2 - \langle x^2, v_1\rangle v_1 = x^2 - \langle x^2, v_1\rangle v_1 = x^2 - 1/3$ eftersom x^3 är udda. Vi har $||\tilde{v}_3||^2 = 8/45$ och väljer $v_3 = \sqrt{45/8}(x^2 - 1/3)$.
(4) $\tilde{v}_4 = x^3 - \langle x^3, v_3\rangle v_3 - \langle x^3, v_2\rangle v_2 - \langle x^3, v_1\rangle v_1 = x^3 - \langle x^3, v_2\rangle v_2 = x^3 - (3/5)x$ eftersom x^3 och x^5 båda är udda. Vi har $||\tilde{v}_4||^2 = 8/175$ och väljer $v_4 = \sqrt{175/8}(x^3 - (3/5)x)$.

Det återstår nu bara att projicera stegfunktionen på vår ortonormala bas. Vi har att

(1) $\langle H(x), v_1\rangle v_1 = (1/2)\int_0^1 dx = 1/2$;
(2) $\langle H(x), v_2\rangle v_2 = (3/2)x\int_0^1 xdx = (3/4x)$;
(3) $\langle H(x), v_3\rangle v_3 = \cdots \int_0^1 (x^2 - 1/3)dx = 0$;
(4) $\langle H(x), v_4\rangle v_4 = \cdots = -(35/32)(x^3 - (3/5)x)$;

vilket ger att det sökta polynomet är

$$p(x) = \frac{1}{2} + \frac{45}{32}x - \frac{35}{32}x^3\,.$$

3. Fouriers problem och separation av variabler

Fouriers problem handlar om att försöka hitta en funktion $u(x,t)$ som beskriver värmen i punkten x vid tiden t i en tunn, rak ståltråd av längd π. Det formulerades som följande begynnelsevärdesproblem:

$$(E)\ u_t = u_{xx}\,,\ 0 < x < \pi\,,\ t > 0\,;$$
$$(B)\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$(I)\ u(x,0) = f(x)\,,\ 0 < x < \pi\,.$$

Fouriers idé var att anta att u är en produkt av två funktioner, en beroende enbart av x och en beroende enbart av t, dvs

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

Ekvationen (E) kan då skrivas om till en ekvation

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Eftersom denna ekvation gäller för alla t och alla x så måste båda sidor vara konstanta. Detta ger två ekvationer:

$$\begin{aligned} T'(t) - \lambda T(t) &= 0 \\ X''(x) - \lambda X(x) &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Den första ekvationen har två lösningar $T(t) = e^{\pm\lambda t}$ där $e^{\lambda t}$ är ofysikalisk eftersom värmen bör avta med tiden. Därför väljer vi $T(t) = e^{-\lambda t}$ som en lösning.

Vi är fria att variera λ och om vi väljer att skriva $\lambda = n^2$ och utvidgar $X(x)$ till en udda funktion får vi att

$$X(x) = b_n \sin(nx)$$

är en lösning där b_n är valfri konstant. Detta ger att

$$u_n(x,t) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nt)$$

är en lösning till systemet (1) för $\lambda = n^2$.

Om vi väljer n till att vara ett heltal så ser vi även att denna lösning uppfyller randvärdena (B). Därför uppfyller även varje summa

$$\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 t} \sin(nt)$$

både (E) och (B). Slutligen vill vi ha en lösning som även uppfyller (I). Om vi utvidgar $f(x)$ till en udda funktion så vet vi från kapitel 4 att den har en Fourierserie med koefficienter

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx\,.$$

Lösningen kommer ges av att välja b_n på detta sätt och låta $N \to \infty$ (läs introduktionen till kapitel 6 i [Vre03] för mer detaljer). Dvs, lösningen till problemet ges av

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nt)$$

där

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx\,.$$

Vretblad 6.2. Hitta en lösning till följande modifierade Fourierproblem:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{a^2} u_{xx}\,,\ 0 < x < 1\,,\ t > 0\,; \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,,\ t > 0\,; \\ u(x,0) &= f(x)\,,\ 0 < x < 1\,. \end{aligned}$$

Lösning. Vi antar att vi kan separaera variablerna t och x, dvs

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

Sätt

$$\tilde{u}(x,t) = u(x, a^2 t)\,.$$

Om vi skriver problemet i termer av $\tilde{u}$ istället för u får vi då

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t(x,t) &= \frac{d}{dt}(\tilde{u}(x,t)) \\ &= a^2 u_t(x, a^2 t) \\ &= u_{xx}(x, a^2 t) \\ &= \tilde{u}_{xx}(x,t)\,. \end{aligned}$$

Detta är bara det vanliga Fourierproblemet vilket vi sett har lösning

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi t)$$

med

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx\,.$$

Vi får därför lösningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi/a)^2 t} \sin(n\pi t)$$

med b_n som ovan.

4. Variation av Fouriers problem

Vretblad Exempel 6.2. Lös följande problem:

$$(E)\ u_t = u_{xx}\,,\ 0 < x < 2\,,\ t > 0\,;$$
$$(B)\ u(0,t) = 2\,,\ u(2,t) = 5\,,\ t > 0\,;$$
$$(I)\ u(x,0) = 1 - x^2\,,\ 0 < x < 2\,.$$

Lösning. Vi skriver

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x)$$

och försöker välja φ så att problemet uttryckt i funktionen v är ett Fourierproblem med 0 som randvärden. Ekv. (E) ger att $v_{xx}(x,t) + \varphi''(x) = v_t(x,t)$ och vi vill därför ha $\varphi''(x) = 0$. Dvs vi vill välja φ som ett polynom av grad 1. Randvärdena (B) ger att $\varphi(0) = 2$ och $\varphi(2) = 5$ och det polynom av grad 1 som uppfyller detta är

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}x + 2\,.$$

Vi får att

$$1 - x^2 = u(x,0) = v(x,0) + \varphi(x) = v(x,0) + \frac{3}{2}x + 2\,.$$

Vi kan därför skriva problemet som

$$(E)\ v_t = v_{xx}\,,\ 0 < x < 2\,,\ t > 0\,;$$
$$(B)\ v(0,t) = 0\,,\ v(2,t) = 0\,,\ t > 0\,;$$
$$(I)\ v(x,0) = -x^2 - \frac{3}{2}x - 1\,,\ 0 < x < 2\,.$$

Detta Fourierproblem vet vi har lösning

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

där

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 (-x^2 - \frac{3}{2}x - 1)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \\ &= -\int_0^2 (x^2+1)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx \\ &= \frac{16(-1)^n - 2}{n\pi} - \frac{16(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}\,. \end{aligned}$$

Vi får slutligen att

$$u(x,t) = \frac{3}{2}x + 2 + \sum_{i=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\ .$$

References

[Vre03] Anders Vretblad, *Fourier analysis and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 223, Springer-Verlag, New York, 2003. MR 1992764