ÖVNING 6 - DIFFTRANS DEL 2

ERIC AHLQVIST

Innehåll

1. Inversa Fouriertransformen

Sats 1.1 (Invers Fouriertransform)**.** *Antag att $f \in L^1(\mathbb{R})$ är kontinuerlig förutom i ett ändligt antar punkter i varje ändligt intervall där den har ändliga hopp. Antag också att*

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t+) - f(t-)) \text{ för alla } t\,.$$

Då gäller att

$$f(t_0) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t_0}d\omega$$

för alla t_0 där f har (generaliserad) höger- och vänsterderivata. I synnerhet, om f är kontinuerlig och bitvis glatt så är formeln sann för alla $t_0 \in \mathbb{R}$.

2. FT och faltning

Sats 2.1 (Faltning)**.**

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\,.$$

Vretblad 7.19. Hitta en funktion f sådan att

$$\int_{\mathbb{R}} f(t-y)e^{-y^2/2}dy = e^{-t^2/4}\,.$$

Lösning. Vänsterledet är på formen

$$(f * g)(t)$$

där $g = e^{-t^2/2}$ vilken har Fouriertransform

$$\mathcal{F}[g] = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}\,.$$

Faltningssatsen ger då att

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f] &= \frac{\mathcal{F}[f * g]}{\mathcal{F}[g]}\\ &= \frac{2\sqrt{\pi}e^{-\omega^2}}{\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}}\\ &= \sqrt{2}e^{-\omega^2/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathcal{F}[g]\,.\end{aligned}$$

Vi bör alltså välja

$$f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/2} \,.$$

3. Plancherels formel

Vretblad 7.41. Hitta Fouriertrasformen av funktionen

$$f(t) = \begin{cases} \sin t \,, & |t| < \pi \,; \\ 0 \,, & \text{annars} \end{cases}$$

och använd resultatet för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi t}{(t^2-1)^2} dt \,.$$

Lösning. Fouriertransformen ges av

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{(1-\omega)i} e^{(1-\omega)it} + \frac{1}{(1+\omega)i} e^{-(1+\omega)it} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}}{(1-\omega)i} + \frac{e^{i\omega\pi} - e^{-i\omega\pi}}{(1+\omega)i} \right) \\
&= -2\sin(\omega\pi) \left(\frac{i}{1-\omega^2} \right) .
\end{aligned}$$

Nu kan vi använda Plancherels formel som säger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \,.$$

Med f som ovan ger detta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 t dt = \frac{4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega \,.$$

Vi har att $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$ och därför blir den vänstra integralen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1-\cos(2t)) dt &= \frac{1}{2} \left(2\pi - \frac{1}{2} \big[\sin(2t) \big]_{-\pi}^{\pi} \right) \\
&= \pi \,.
\end{aligned}$$

Slutligen får vi alltså

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega = \frac{\pi^2}{2} \,.$$

Referenser