ÖVNING 7 - DIFFTRANS DEL 2

ERIC AHLQVIST

Innehåll

1. Distributioner - Introduction

Vretblad 2.23. Vad är $\delta(2t)$? Utred genom att manipulera

$$\int \varphi(t)\delta(2t)dt$$

på lämpligt sätt. Mer generallt, vad är $\delta(at)$ för $a \neq 0$?

Lösning. Genom variabelbytet $s = at$ får vi att

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\delta(at)dt &= \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} \varphi(s/a)\delta(s)ds \\ &= \frac{1}{|a|}\varphi(0)\,.\end{aligned}$$

Detta följer av att

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{a}$$

och att det för varje funktion f gäller att

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(-t)dt &= -\int_{\infty}^{-\infty} f(-s)\delta(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-s)\delta(s)ds \\ &= f(0)\,.\end{aligned}$$

Vretblad 2.24. Skriv om följande funktioner med hjälp av stegfunktionen:

(1) $t|t+1|$;
(2) $e^{-|t|}$;
(3) $\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$, $t \neq 0$;
(4) $f(t) = A$ om $t < a$, $= B$ om $t > a$.

Lösning. (1) Vi har

$$t|t+1| = \begin{cases} t(t+1)\,, & t+1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -1\,; \\ -t(t+1)\,, & t+1 < 0 \Leftrightarrow t < -1\,. \end{cases}$$

och kan därför skriva

$$\begin{aligned}t|t+1| &= t(t+1)(H(t+1) - H(-(t+1))) \\ &= t(t+1)(2H(t+1) - 1)\,.\end{aligned}$$

(2) Vi har

$$e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t}\,, & t \geq 0\,; \\ e^{t}\,, & t < 0\,. \end{cases}$$

och kan därför skriva

$$e^{-|t|} = e^{(-H(t)+H(-t))t} = (e^{-t} - e^{t})H(t) + e^{t}\,.$$

(3) Vi har

$$t/|t| = H(t) - H(-t) = 2H(t) - 1\,.$$

(4) Vi har

$$f(t) = AH(-t) + B(H(t)) = (B - A)H(t) + A\,.$$

Ser du något mönster? Skriv

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t)\,, & t < a \\ f_2(t)\,, & t \geq a\,. \end{cases}$$

i termer av stegfunktionen!

Vretblad 2.27. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \geq 1\,; \\ 1 - x^2\,, & -1 < x < 1\,; \\ 0\,, & x < -1\,. \end{cases}$$

Skriv om med hjälp av stegfunktionen och beräkna $f''(x)$. Förenkla $(x^2 - 1)f''(x)$ så långt som möjligt.

Lösning. Vi har att

$$f(x) = (H(x+1) - H(x-1))(1 - x^2)\,.$$

Eftersom

$$H'(t) = \delta(t)$$

har vi att

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\delta(x+1) - \delta(x-1))(1 - x^2) - 2x(H(x+1) - H(x-1)) \\ &= -2x(H(x+1) - H(x-1)) \end{aligned}$$

eftersom $(1 - x^2) = 0$ då $x = \pm 1$. Vi får

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2(H(x+1) - H(x-1)) - 2x(\delta(x+1) - \delta(x-1)) \\ &= -2(H(x+1) - H(x-1)) + 2(\delta(x+1) + \delta(x-1))\,. \end{aligned}$$

Detta ger nu att

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)f''(x) &= (x^2 - 1)(-2(H(x+1) - H(x-1)) + 2(\delta(x+1) + \delta(x-1))) \\ &= (x^2 - 1)(-2(H(x+1) - H(x-1))) \\ &= 2f(x)\,. \end{aligned}$$

2. Distributioner - Fortsättning

Definition 2.1. Vi säger att en funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tillhör *Schwartzklassen* $\mathcal{S}$ om φ har derivata av alla ordningar och om det för varje $k, n \in \mathbb{N}$ finns en konstant $C_{n,k}$ sådan att

$$(1 + |x|)^n |\varphi^{(k)}(x)| \leq C_{n,k}\,, \qquad \text{för alla } x \in \mathbb{R}\,.$$

Definition 2.2. Vi säger att en sekvens $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ *konvergerar till en funktion* $\psi \in \mathcal{S}$ och skriver

$$\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi \quad \text{då} \quad i \to \infty\,,$$

om det för varje $n, k \geq 0$ gäller att

$$\lim_{i\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\varphi_i^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| = 0\,.$$

Definition 2.3. En *tempererad distribution* är en funktion

$$f\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

med följande två egenskaper

(1) Linjäritet:
$$f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 f(\varphi_1) + c_2 f(\varphi_2)$$
för alla funktioner $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$ och alla $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

(2) Kontinuitet: Om
$$\varphi_i \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi \quad \text{då} \quad i \to \infty$$
så gäller det att
$$\lim_{i\to\infty} f(\varphi_i) = f(\psi)\,.$$

Mängden tempererade distributioner kallar vi för $\mathcal{S}'$.

Exempel 2.4. Funktionen

$$\begin{aligned} \delta\colon \mathcal{S} &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \varphi(0) \end{aligned}$$

är en tempererad distribution som kallas *Diracs δ-distribution.*

Exempel 2.5. Funktionen

$$\begin{aligned} H\colon \mathcal{S} &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \int_0^{\infty} \varphi(x)dx \end{aligned}$$

är en tempererad distribution som kallas *Steg-distributionen* (eller *Heaviside-distributionen*).

Definition 2.6. Låt f vara en tempererad distribution. Vi definierar *derivatan* f' av f som den tempererade distributionen som ges av

$$f'(\varphi) = -f(\varphi') \quad \text{för alla } \varphi \in \mathcal{S}\,.$$

Exempel 2.7. Vi har att derivatan av Steg-distributionen är Diracs δ-distribution eftersom

$$\begin{aligned} H'(\varphi) &= -H(\varphi') \\ &= -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx \\ &= -\left[\varphi(x)\right]_0^{\infty} \\ &= \varphi(0)\,, \end{aligned}$$

dvs $H' = \delta$.

Vretblad 8.4. Visa att

$$x^2\delta''' = 6\delta' .$$

Lösning. Fört måste vi veta vad som menas med $x^2\delta'''$. Per definition har vi

$$\begin{aligned}
x^2\delta'''(\varphi) &= \delta'''(x^2\varphi) \\
&= -\delta\left(\frac{d^3}{dx^3}(x^2\varphi)\right) \\
&= -\delta(6\varphi' + 6x\varphi'' + x^2\varphi''') \\
&= -6\varphi'(0) \\
&= -6\delta(\varphi') \\
&= 6\delta'(\varphi)
\end{aligned}$$

för alla $\varphi \in \mathcal{S}$. Dvs, $x^2\delta''' = 6\delta'$.