ÖVNING 2 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Kap 3.2 Wronskian och fullständig lösningsmängd

Två lösningar $y_1(t)$ och $y_2(t)$ till en andra gradens linjär homogen differentialekvation sägs bilda en *fullständig lösningsmängd* om alla lösningar till ekvationen kan uttryckas som

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

för något val av konstanter C_1 och C_2. Lösningen

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)\,,$$

där vi låter C_1 och C_2 vara obestämda, kallas då för den *allmänna lösningen* (*generella lösningen*).

Sats 1.1 ([BD13, Theorem 3.2.5])**.** *Antag att vi har en differentialekvation*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\,, \tag{1}$$

där p och q är kontinuerliga in något intervall I. Låt t_0 vara en punkt i I. Låt y_1 vara en lösning till (1) som uppfyller begynnelsevillkoret

$$y_1(t_0) = 1\,, \quad y_1'(t_0) = 0$$

och låt y_2 vara en lösning till (1) som uppfyller begynnelsevillkoret

$$y_2(t_0) = 0\,, \quad y_2'(t_0) = 1\,.$$

Då bildar y_1 och y_2 en fullständig lösningsmängd till (1).

Boyce–DiPrima 3.2.26. Kolla att $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = xe^x$ är lösningar till problemet

$$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad x > 0$$

och bestäm om de bildar en fullständig lösningsmängd.

Lösning. Kolla själv att y_1 och y_2 är lösningar. För att se att y_1 och y_2 bildar en fullständing lösningsmängd tittar vi på Wronskianen

$$\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = x^2e^x\,,$$

vilken är skiljd från noll då $x > 0$. Dvs y_1 och y_2 bildar en fullständig lösningsmängd.

Boyce–DiPrima 3.2.22. Hitta den fullständiga lösningsmängden enligt Sats 1.1 till följande differentialekvation och startpunkt:

$$y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad t_0 = 0\,. \tag{2}$$

Lösning. Det karaktärsitiska polynomet är $r^2 + 2r - 3$ vilket kan faktoriseras som $(r-1)(r+3)$ och har därför rötter $r_1 = 1$ och $r_2 = -3$. Därför har vi att $z_1 = e^t$ och e^{-3t} är två lösningar till (2). För att hitta två lösningar y_1 och y_2 som uppfyller begynnelsevillkoren i thmen skriver vi $y_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2$, $y_2 = c_3 z_1 + c_4 z_2$ och löser systemen $\{y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 0\}$ och $\{y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1\}$ vilka kan skrivas på matrisform som

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösningarna till dessa ekvationer är $c_1 = 3/4$, $c_2 = 1/4$, $c_3 = 1/4$ och $c_4 = -1/4$. Dvs, den fullständiga lösningsmängden enligt Sats 1.1, är

$$\left\{ y_1 = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-3t}, y_2 = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t} \right\}.$$

2. Kap 3.3 Komplexa rötter till karaktäristiska polynomet

Antag att vi ska lösa en andra gradens linjär homogen differentialekvation med konstanta koefficienter vilken ger karaktäristisk ekvation $r^2 + ar + b = 0$, där

$$a^2/4 - b < 0\,.$$

Då har ekvationen komplexa rötter $r_1 = u + iv$ och $r_2 = u - iv$ (u och $v \neq 0$ reella). Vi får då två stycken lösningar $y_1 = e^{r_1 t} = e^u t e^{ivt}$ och $y_2 = e^{r_2 t} = e^{ut}e^{-ivt}$ till vår ekvation, men dessa lösningar kan anta komplexa värden. Enligt superpositionsprincipen vet vi att alla linjärkombinationer av dessa lösningar också ger en lösning. Därför är även

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

och

$$\frac{i}{2}(y_1 - y_2)$$

är lösningar. Men om vi skriver ut dessa får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{ut}e^{ivt} + e^{ut}e^{-ivt}) &= \frac{1}{2}e^{ut}(e^{ivt} + e^{-ivt}) \\ &= e^{ut}\cos(vt) \\ &= \mathrm{Re}(y_1) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}(e^{ut}e^{ivt} - e^{ut}e^{-ivt}) &= \frac{i}{2}e^{ut}(e^{ivt} - e^{-ivt}) \\ &= e^{ut}\sin(vt) \\ &= \mathrm{Im}(y_1)\,. \end{aligned}$$

Dvs vi har hittat två stycken *reella* lösningar. Om vi tittar på Wronskianen av dessa två lösningar så ser vi att den är

$$e^{2ut}\begin{vmatrix} \cos(vt) & \sin(vt) \\ -v\sin(vt) & v\cos(vt) \end{vmatrix} = ve^{2ut}$$

vilket aldrig är noll då $v \neq 0$. Dvs $\mathrm{Re}(y_1)$ och $\mathrm{Im}(y_1)$ bildar en fullständig lösningsmängd.

Boyce–DiPrima 3.3.11. Lös differentialekvationen

$$y'' + 6y' + 10y = 0\,,$$

dvs hitta den generella lösningen.

Lösning. Om vi löser den karaktäristiska ekvationen får vi rötter $r_1 = -3 + i$ och $r_2 = -3 - i$. Då vet vi att en fullständiglösningsmängd ges av $y_1 = e^{-3t}\cos(t)$, $y_2 = e^{-3}\sin(t)$ och den generella lösning ges av

$$y = c_1 e^{-3t}\cos(t) + c_2 e^{-3}\sin(t)\,.$$

3. Kap 3.4 Upprepade rötter och reduktion av ordning

Antag att vi ska lösa en andra gradens linjär homogen differentialekvation

$$y'' + ay' + by = 0$$

med konstanta koefficienter vilken ger karaktäristisk ekvation $r^2 + ar + b = 0$, där

$$a^2/4 - b = 0\,.$$

Då har ekvationen bara en rot, nämligen $r = -a/2$. Vi vet att $y_1 = e^{-at/2}$ är en lösning. Men det är även $y_2 = ty_1$. Mycket riktigt,

$$y_2' = y_1 - (a/2)y_2\,,$$

$$y_2'' = y_1' - (a/2)(y_1 - (a/2)y_2)$$

och om vi sätter in detta i differentialekvationen får vi

$$\begin{aligned} y_1' - (a/2)(y_1 - (a/2)y_2) + a(y_1 - (a/2)y_2) + by_2 &= \\ -(a/2)y_1 - (a/2)(y_1 - (a/2)y_2) + a(y_1 - (a/2)y_2) + by_2 &= \\ (a^2/4 - a^2/2 + b)y_2 &= \\ (-a^2/4 + b)y_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Om vi beräknar Wronskianen av y_1 och y_2 ser vi att den är e^{-at} vilket aldrig är 0. Därför bildar y_1 och y_2 en fullständig lösningsmängd.

Boyce–DiPrima 3.4.4. Hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$4y'' - 12y' + 9y = 0\,.$$

Lösning. Vi får karaktäristik ekvation

$$r^2 - 3r + 9/4 = (r - 3/2)^2 = 0\,.$$

Enligt ovan ges då den allmänna lösningen av

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 t e^{3t/2}\,.$$

Boyce–DiPrima 3.4.42. Hitta en fullständig lösningsmängd till ekvationen

$$2t^2y'' - 5ty' + 5y = 0\,.$$

Lösning. En ekvation på denna form kallas för Eulers ekvation. Den kan lösas för $t > 0$ genom att sätta $x = \ln(t)$ och skriva om ekvationen då vi ser y som en funktion av x. Vi har att

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

och

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

vilket betyder att vi kan skriva ekvationen som

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{5}{2}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{5}{2}y = 0\,.$$

Denna ekvation kan nu lösas som vanligt. Rötterna till den karaktäristiska ekvationen blir $5/4 \pm i\sqrt{15}/4$ och en fundamental lösningsmängd ges av

$$u_1 = e^{5x/4}\cos(\sqrt{15}x/4) \text{ och } u_2 = e^{5x/4}\sin(\sqrt{15}x/4)\,.$$

Om vi nu byter x mot $\ln(t)$ får vi för $t > 0$ en fundamental lösningsmängd

$$\{y_1 = t^{5/4}\cos(\sqrt{15}\ln(t)/4)\,,\ y_2 = t^{5/4}\sin(\sqrt{15}\ln(t)/4)\}\,.$$

4. Kap 3.5 Icke-homogena ekvationer och obestämda koefficienter

För att lösa icke-homogena ekvationer använder vi oss av följande resultat.

Sats 4.1 ([BD13, Theorem 3.5.2]). *Den allmänna lösningen till en icke-homogen linjär differentialekvation*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{3}$$

ges av

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\,,$$

där y_1, y_2 utgör en fullständig lösningsmängd till motsvarande homogena ekvation, c_1, c_2 är konstanter och y_p är en specifik lösning till (3).

Bevis. Om y är en lösning till (3) så är $y - y_p$ en lösning till motsvarande homogena ekvation, dvs $y - y_p = c_1y_1 + c_2y_2$ för några konstander c_1 och c_2. □

Anmärkning 4.2. Se [BD13, Example 4] för en resumé av ansatser för att hitta partikulärlösning.

Boyce–DiPrima 3.5.9. Hitta den allmänna lösningen till följande ekvation:

$$2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\cos(t)\,. \tag{4}$$

Lösning. Vi delar upp ekvationen i två ekvationer, nämligen $2y'' + 3y' + y = t^2$ och $2y'' + 3y' + y = \cos(t)$. Summan av en partikulärlösning till den första och en partikulärlösning till den andra ger då en partikulärlösning till (4).

För att hitta en partikulärlösning till $2y'' + 3y' + y = t^2$ gör vi ansatsen $Y_1 = at^2 + bt + c$. Insatt i 4 ger detta att $a = 1$, $b = -6$ och $c = 14$.

För att hitta en partikulärlösning till $2y'' + 3y' + y = \cos(t)$ gör vi ansatsen $Y_2 = A\cos(t) + B\sin(t)$. Insatt i 4 ger detta att $A = -3/10$ och $B = 9/10$.

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen hittas genom att hitta rötter till det karaktäristiska polynomet $r^2 + (3/2)r + 1/2$. Rötterna är -1 och $-1/2$ och vi får att den allmänna lösningen till (4) är

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10}\cos(t) + \frac{9}{10}\sin(t)\,.$$

5. Kap 3.6 Variation av parametrar

Variation av parametrar är en metod som fungerar mer allmänt för att lösa en icke-homogen linjär ekvation

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)\,. \tag{5}$$

Metoden går ut på att som vanligt hitta lösningar y_1 och y_2 till motsvarande homogena ekvation, som utgör en fundamental lösningsmängd och sedan söka en partikulärlösning på formen

$$y_p = u(t)y_1(t) + v(t)y_2(t)$$

med antagandet att

$$u'y_1 + v'y_2 = 0\,. \tag{6}$$

Om vi sätter in y_p i (5) och förenklar så ser vi att

$$u'y_1' + v'y_2' = g(t)\,. \tag{7}$$

Nu bildar (6) och (7) ett ekvationssystem vilket på matrisform ser ut som

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

(Notera att den första matrisen är Wronskianen). Lösningarna till detta system är

$$u'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} \text{ och } v' = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,.$$

Nu kan vi integrera för att bestämma u och v. Den allmänna lösningen ges som vanligt av

$$c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\,.$$

Boyce–DiPrima 3.6.7. Hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$y'' + 4y' + 4y = 2t^{-2}e^{-2t}\,. \tag{8}$$

Lösning. Den homogena ekvationen har karaktäristisk ekavtion $(r+2)^2 = 0$ vilket ger allmän homogen lösning $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ där $y_1 = e^{-2t}$ och $y_2 = te^{-2t}$. Vi har att $W(y_1,y_2)(t) = e^{-4t}$.

Med ansatsen $y_p = u(t)y_1(t) + v(t)y_2(t)$ och antagandet at

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

så får vi på samma sätt som ovan att

$$u'(t) = -\frac{2t^{-1}e^{-4t}}{e^{-4t}} = -2t^{-1}\,,$$

$$v'(t) = \frac{2t^{-2}e^{-4t}}{e^{-4t}} = 2t^{-2}$$

och om vi integrerar får vi att

$$u(t) = -2\ln(t) + A \text{ och } v(t) = -2t^{-1} + B\,.$$

Eftersom $-2t^{-1}y_2 = -2y_1$ ser vi att dena allmänna lösningen kan skrivas som

$$y = C_1e^{-2t} + C_2te^{-2t} - 2\ln(t)e^{-2t}\,,$$

där C_1 och C_2 är konstanter.

References

[BD13] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 2013.