ÖVNING 3 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Komplexvärda funktioner och Kap 5.1 Potensserier

För varje potensserie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)$$

så finns ett reellt tal $R \geq 0$ så att $f(z)$ konvergerar absolut för alla z så att $|z - z_0| < R$ och så att $f(z)$ divergerar för alla z så att $|z - z_0| > R$.

Boyce–DiPrima 5.1.5. Bestäm konvergensradien till serien

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2}$$

Lösning. Vi har att

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}(x+1/3)^n\,.$$

Vi gör kvottestet:

$$K_n(x) = \frac{(3x+1)^{n+1}/(n+1)^2}{(3x+1)^n/n^2} = (3x+1)\frac{n^2}{(n+1)^2}\,.$$

Gränsvärdet av detta då $n \to \infty$ är $K(x) = \lim_{n\to\infty} K_n(x) = 3x+1$. Enligt (satsen om kvottestet) så är $S(x)$ absolut konvergent då $|K(x)| < 1$ (dvs då $|x+1/3| < 1/3$) och divergent då $|K(x)| > 1$ (dvs då $|x+1/3| > 1/3$). Konvergensradien är alltså $R = 1/3$ vilket betyder att serien konvergerar i den öppna disk som har radie $1/3$ och centrum i punkten $x_0 = -1/3$.

2. Kap 5.2 Potensserielösning nära en ordinär punkt

Givet en differentialekvation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{q(t)}{p(t)}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{r(x)}{p(x)}y = 0 \tag{1}$$

så kallas $t = t_0$ för en *ordinär punkt* om $p(t_0) \neq 0$ och för en *singulär punkt* om $p(t_0) = 0$.

Boyce–DiPrima 5.2.7. Hitta den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + xy' + 2y = 0 \tag{2}$$

genom att hitta potensserielösningar kring punkten $x_0 = 0$.

Lösning. Vi söker lösningar på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om vi sätter in detta uttryck i (2) så får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n)x^n \,. \end{aligned}$$

Detta ger att

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+1}\,.$$

Detta kommer att ge en lösning för udda n och en lösning för jämna n.

Vi får

$$\begin{array}{lllll} a_2 = -a_0 & a_4 = \frac{a_0}{3} & a_6 = \frac{-a_0}{3\cdot 5} & a_8 = \frac{a_0}{3\cdot 5\cdot 7} & \dots \\ a_3 = \frac{-a_1}{2} & a_5 = \frac{a_1}{2\cdot 4} & a_7 = \frac{-a_1}{2\cdot 4\cdot 6} & a_9 = \frac{a_1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} & \dots \end{array}$$

och ser att de generella uttrycken blir

$$a_{2n} = a_0\frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)} \quad \text{och} \quad a_{2n+1} = a_1\frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n} 2i} \quad (n \geq 1)$$

(detta kan bevisas enkelt genom induktion). Notera att alla värden på a_0 och a_1 ger en lösning till problemet. Vi väljer två lösningar

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}x^{2n} \quad \text{och} \quad y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^{n} 2i}x^{2n+1}$$

(dessa svarar mot $a_0 = a_1 = 1$). Vi har att $y_1(0) = y_2'(0) = 1$ och $y_1'(0) = y_2(0) = 0$ så enligt [BD13, Theorem 3.2.5] så bildar y_1 och y_2 en fullständig lösningsmängd om och endast om Wronskianen $W(y_1, y_2)$ är nollskiljd i punkten $x = x_0 = 0$. Wronskianen ges av

$$W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1\,.$$

References

[BD13] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 2013.