ÖVNING 5 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Kap 7.1 Introduktion

Boyce–DiPrima 7.1.8. (a) Skriv om systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 2y_2\,, \quad y_1(0) = 3 \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2\,, \quad y_2(0) = 1 \end{aligned}$$

till en ekvation av andra ordningen.

(b) Hitta y_1 och y_2 som uppfyller ekvationen och begynnelsevillkoren.

(c) Skissa grafen till lösningen i y_1y_2-planet för $t \geq 0$.

Lösning. (a) Välj $u = y_1$. Då får vi $y_2 = (3u - u')/2$. Detta ger att

$$y_2' = \frac{1}{2}(3u' - u'')$$

och

$$y_2' = 2u - 2\frac{1}{2}(3u - u')\,,$$

vilket ger

$$u'' - u' - 2u = 0\,.$$

(b) Denna ekvation har karaktäristik ekvation $(x+1)(x-2)$ vilket ger allmän lösning

$$\begin{aligned} y_1(t) &= u(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} \\ y_2(t) &= (3u - u')/2 = 2c_1e^{-t} + \frac{1}{2}c_2e^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Begynnelsevärdet ger att

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vilket har lösning $c_1 = -1/3$ och $c_2 = 10/3$, så lösningen till begynnelsevärdesproblemet är

$$y_1 = --\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{10}{3}e^{2t} \quad \text{och} \quad y_2 = -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{2}e^{2t}\,.$$

(c) Gör själv.

2. Kap 7.4 Grundläggande teori

Sats 2.1 ([BD13, Theorem 7.4.3]). *Om $\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(n)}$ är lösningar till en ekvation*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x} \tag{1}$$

(bestående av n stycken ekvationer) i ett intervall $I = (\alpha, \beta)$ så är $W[\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(n)}]$ antingen noll överallt i I eller nollskiljd överallt i I.

Boyce–DiPrima 7.4.2. Ge ett bevis till Sats 2.1 i fallet $n = 2$ genom att utföra steg (a)-(c). Låt $\boldsymbol{x}^{(1)}$ och $\boldsymbol{x}^{(2)}$ vara två lösningar på ett intervall $I = (\alpha, \beta)$ och låt W vara Wronskianen av dessa två lösningar.

(a) Visa att

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(b) Visa att

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W$$

genom att använda (a) och Ekvation (1).

(c) Hitta $W(t)$ genom att lösa ekvationen i (b). Visa att Sats 2.1 följer av detta för $n = 2$.

Lösning. (a) Vi har att $W = x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}$ och om vi deriverar detta får vi

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

(b) Om vi skriver ut systemet (1) för $\boldsymbol{x} = x^{(i)}$ ($i \in \{1, 2\}$) så får vi

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1^{(i)}}{dt} \\ \frac{dx_2^{(i)}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}x_1^{(i)} + p_{12}x_2^{(i)} \\ p_{21}x_1^{(i)} + p_{22}x_2^{(i)} \end{pmatrix}$$

vilket ger att

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} p_{11}x_1^{(1)} + p_{12}x_2^{(1)} & p_{11}x_1^{(2)} + p_{12}x_2^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ p_{21}x_1^{(1)} + p_{22}x_2^{(1)} & p_{21}x_1^{(2)} + p_{22}x_2^{(2)} \end{vmatrix} \\ &= (p_{11} + p_{22})(x_1^{(1)}x_2^{(2)} - x_1^{(2)}x_2^{(1)}) \\ &= (p_{11} + p_{22})W \end{aligned}$$

(c) Ekvationen $W' = (p_{11} + p_{22})W$ har generell lösning $W = Ae^{-(p_{11}+p_{22})t}$ vilket betyder att $W = 0$ för alla t om $A = 0$ och $W \neq 0$ för alla t om $A \neq 0$.

3. 7.5 Homogena linjära system med konstanta koefficienter

Om matrisen $P(t)$ i Ekv. (1) är konstant, $P(t) = A$, så kan vi söka lösningar på formen

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$$

där $\boldsymbol{v}$ och λ är konstanta. Om vi deriverar denna lösning och sätter in i ekvationen får vi

$$\lambda \boldsymbol{v}e^{\lambda t} = A\boldsymbol{v}e^{\lambda t} \iff (A - \lambda I)\boldsymbol{v}e^{\lambda t} = 0\,.$$

Om matrisen $A - \lambda I$ har full rank finns bara en lösning, nämligen $\boldsymbol{v} = 0$, vilket ger den konstanta noll-lösningen. Alla icke-triviala lösningar ges därför av

$$\det(A - \lambda I) = 0\,,$$

dvs, då λ är ett egenvärde till matrisen A.
Boyce–DiPrima 7.5.3. (a) Hitta den generella lösningen till systemet

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

och beskriv dess beteende då $n \to \infty$.
(b) Skissa riktningsfältet (i x_1x_2-planet).

Lösning. (a) Låt A vara matrisen given i uppgiften. Vi söker efter egenvärden till A, dvs lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa ges av $\lambda = \pm 1$ och motsvarande egenvektorer kan väljas som

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges därför av

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

(b) Skissa själv genom att först skissa lösningarna för $c_1 = 1, c_2 = 0$ och $c_1 = 0, c_2 = 1$ och notera att

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = -\frac{1}{3}.$$

4. 7.6 Komplexa egenvärden

Boyce–DiPrima 7.6.3. (a) Hitta den generella lösningen (reellvärda funktioner) till systemet

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

och beskriv dess beteende då $n \to \infty$.
(b) Skissa riktningsfältet (i x_1x_2-planet).

Lösning. (a) Låt A vara matrisen given i uppgiften. Vi söker efter egenvärden till A, dvs lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa ges av $\lambda = \pm i$ och motsvarande egenvektorer kan väljas som

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \end{pmatrix}.$$

Notera att dessa är varandras konjugat och den allmänna lösningen fås genom superposition av real- och imaginärdel av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \end{pmatrix} e^{it}.$$

Dvs en allmänn lösning ges av

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 2\sin t \end{pmatrix}.$$

(b) Skissa själv. Notera att $\boldsymbol{x}'$ har konstant riktning längs $k\boldsymbol{x}$ för $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Detta förenklar proceduren.

Boyce–DiPrima 7.6.10. Hitta lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och beskriv dess beteende då $n \to \infty$.

Lösning. Låt A vara matrisen given i uppgiften. Vi söker efter egenvärden till A, dvs lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$. Dessa ges av $\lambda = \pm - 2 \pm i$ och motsvarande egenvektorer kan väljas som

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notera att dessa är varandras konjugat och den allmänna lösningen fås genom superposition av real- och imaginärdel av

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2+i)t}.$$

Dvs en allmänn lösning ges av (till ekv. utan beg.-villkor)

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Konstanterna c_1 och c_2 bestäms genom begynnelsevärdena till $c_1 = 2$ och $c_2 = 1$ vilket ger lösningen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= 2e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{-2t} \begin{pmatrix} 3\sin t + \cos t \\ \sin t + 2\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

References

[BD13] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 2013.