ÖVNING 6 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Kap 7.7 Fundamentalmatriser

Om en generell lösning till ett system ges av

$$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$$

så ges en fundamentalmatris av

$$A = \begin{pmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{pmatrix},$$

dvs matrisen med $\bar{x}_1$ och $\bar{x}_2$ som kolumnvektorer.

Boyce–DiPrima 7.7.4. (a) Hitta en fundamentalmatris för systemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\bar{x}$$

och

(b) hitta den fundanmentalmatris $\Phi(t)$ sådan att $\Phi(0) = I$.

Lösning. (a) egenvärdena till matrisen är 2 och -3 och

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

är egenvektorer till 2 resp. -3. En fundamentalmatris ges då av

$$\begin{pmatrix}4e^{2t} & e^{-3t}\\ e^{2t} & -e^{-3t}\end{pmatrix}.$$

(b) Ekvationen $\Phi(0) = I$ ger att

$$\begin{pmatrix}4c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_2\\-c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

vilket har lösningar $c_1 = c_2 = 1/5$ och att

$$\begin{pmatrix}4c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_2\\-c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

vilket har lösningar $c_1/5$ och $c_2 = -4/5$. Detta ger två lösningar

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4e^{2t} + e^{-3t}\\ e^{2t} - e^{-3t}\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4e^{2t} - 4e^{-3t}\\ e^{2t} + 4e^{-3t}\end{pmatrix}$$

vilka tillsammans formar fundamentalmatrisen

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^{2t}+e^{-3t} & 4e^{2t}-4e^{-3t} \\ e^{2t}-e^{-3t} & e^{2t}+4e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

2. Kap 7.8 Upprepade egenvärden

Boyce–DiPrima 7.8.7. Hitta lösningen till systemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\bar{x}\,, \quad \bar{x}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Karaktäristiska polynomet är r^2+6r+9 vilket har en dubbelrot $r=-3$. Motsvarande egenvektor kan väljas som $(1\ \ 1)^T$ så att en lösning ges av

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

En andra lösning kan då antas vara på formen

$$\bar{x}_2 = \bar{a}te^{-3t} + \bar{b}e^{-3t}.$$

Om vi sätter in detta i systemet får vi två ekvationer (en för alla termer som innehåller t som en faktor och en för de termer som ej innehåller t som en faktor):

$$(A+3I)\bar{a} = 0 \tag{1}$$

och

$$(A+3I)\bar{b} = \bar{a}\,. \tag{2}$$

Då ser vi att $\bar{a}$ är en egenvektor och därför på formen $k(1\ \ 1)^t$ och Ekvation (2) blir då

$$(A+3I)\bar{b} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får att $4b_1 - 4b_2 = k$ och vi sätter $b_1 = s$ vilket ger $b_2 = s - k/4$. Begynnelsevärdet ger nu att $s = 4$ och $s - k/4 = 2$, dvs $k = 8$. Vi får lösningen

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 4+8t \\ 2+8t \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

3. Kap 7.9 Icke-homogena linjära system

För att lösa ett system

$$\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \bar{g}(t)$$

kan vi definiera $\bar{y}$ genom

$$\bar{x} = T\bar{y}$$

där T är basbytesmatrisen med normerade egenvektorer till A som kolumnvektorer. På detta vis kan vi istället lösa systemet

$$\bar{y}' = (T^{-1}AT)\bar{y} + T^{-1}\bar{g}(t)$$

vilket består av en separat ekvation för varje y_i. Vi kan därför lösa varje ekvation separat.

Boyce–DiPrima 7.9.10. Lös systemet

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} .$$

Lösning. Egenvärdena till matrisen är -1 och -4 och de normerade egenvektorerna bildar basbytesmatriserna

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} .$$

Om vi sätter $\bar{x} = T\bar{y}$ får ett nytt system

$$\bar{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \bar{y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} .$$

Lös de två separata ekvationerna mha integrarande faktor. Detta ger generalla lösningar

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - \sqrt{2}) t e^{-t} \\ y_2 &= c_2 e^{-4t} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}(1 + \sqrt{2}) t e^{-t} \end{aligned} .$$

Vi får nu

$$\bar{x} = T\bar{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} t e^{-t} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} .$$