ÖVNING 7 - DIFF. OCH TRANS.

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Autonoma system och stabilitet

Ett system

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}) \tag{1}$$

kallas för *autonomt* (dvs, $\bar{f}$ beror endast av $\bar{x}$ och ej separat av t). En punkt $\bar{x}$ sådant att $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ kallas för en *kritisk punkt* eller *jämviktslösning*.

En kritisk punkt $\bar{x} = \bar{x}_0$ till (1) kallas för *stabil* (*stabil lösning*, *stabil jämviktslösning*) om det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att för varje lösning $\bar{x} = \bar{g}(t)$ till ekvationen (1) som uppfyller $||\bar{g}(0) - \bar{x}_0|| < \delta$, gäller att $||\bar{g}(t) - \bar{x}_0|| < \varepsilon$ för alla $t \geq 0$. En kritisk punkt som ej är stabil kallas för *instabil*.

En kritisk punkt $\bar{x} = \bar{x}_0$ till (1) kallas för *asymptotiskt stabil*, om den är stabil och det existerar ett $\delta_0 > 0$ så att om en lösning $\bar{x} = \bar{g}(t)$ till (1) uppfyller $||g(0) - \bar{x}_0|| < \delta_0$ så gäller att

$$\lim_{t\to\infty} \bar{g}(t) = \bar{x}_0\,.$$

Givet en asymptotiskt stabil kritisk punkt $\bar{x}_0$ så kallas det område U i x_1x_2-planet, sådant att $\bar{x} \in U$ innebär att

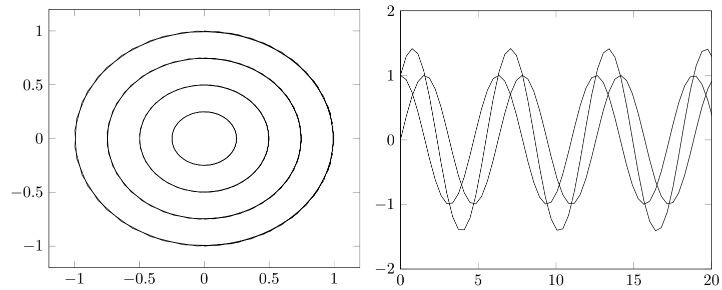
$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = \bar{x}_0\,,$$

för *attraktionsområdet till* (eng. *basin of attraction*) $\bar{x}_0$.

Boyce–DiPrima 9.1.6. Ange för systemet nedan om vilken typ av kritisk punkt $(0,0)$ är och ange om den är stabil, asymptotiskt stabil eller instabil. Skissa också flera banor i x_1x_2-planet och skissa några typiska lösning i tx_1-planet.

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \bar{x}\,.$$

Lösning. Matrisen har egenvärden i och $-i$, dvs rent imaginära. Detta betyder att $(0,0)$ är ett centrum (eng. center) och en stabil kritisk punkt. Lösningar kommer att vara ellipser kring origo i x_1x_2-planet och i tx_1-planet kommer vi ha linjärkombinationer $x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.



Boyce–DiPrima 9.1.2. Ange för systemet nedan om vilken typ av kritisk punkt $(0,0)$ är och ange om den är stabil, asymptotiskt stabil eller instabil. Skissa också flera banor i x_1x_2-planet och skissa några typiska lösning i tx_1-planet.

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{x}\,.$$

Lösning. Matrisen har egenvärden 4 och 2, dvs reella med samma tecken. Detta betyder att $(0,0)$ är en nodal källa (eng. nodal source) och en instabil kritisk punkt. Vi ser att

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1}{3}\,, \text{ och}$$
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{x_2}{x_1} = 1\,.$$

Vi kan se detta som att alla banors derivata kommer att närma sig $-1/3$.

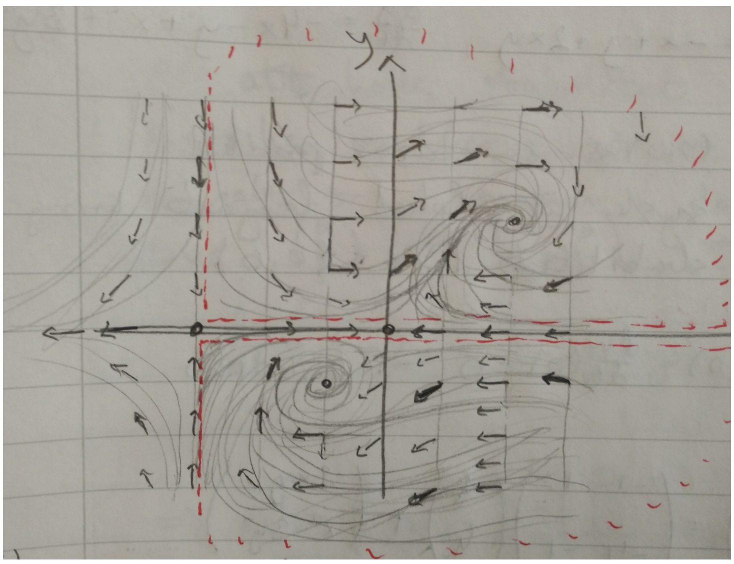
(LÄGG TILL BILD)

Boyce–DiPrima 9.2.10. Givet systemet

$$x' = (3+x)(y-x)\,, \quad y' = y(2+x-x^2)$$

(a) Hitta kritiska punkter;
(b) Skissa banor i xy-planet;
(c) Klassificera alla kritiska punkter utifrån skissen;
(d) Beskriv attraktionsområdet för varje asymptotiskt stabil kritisk punkt.

Lösning. De kritiska punkterna är $\bar{x}_1 = (-3,0)$, $\bar{x}_2 = (0,0)$, $\bar{x}_3 = (-1,-1)$ och $\bar{x}_4 = (2,2)$.



2. Lokalt linjära system

Antag att vi har ett system

$$\bar{x}' = A(\bar{x} - \bar{x}_0) + \bar{g}(\bar{x}) \tag{2}$$

och att $\bar{x}_0$ är en *isolerad* kritisk punkt (dvs det finns en öppen disk som innehåller $\bar{x}_0$ men inga andra kritiska punkter). Om vi har att

$$\frac{||\bar{g}(\bar{x})||}{||\bar{x}||} \to 0 \quad \text{då} \quad \bar{x} \to \bar{x}_0$$

så säger vi att systemet (2) är *lokalt linjärt* kring $\bar{x}_0$.

Boyce–DiPrima 9.3.2. Givet systemet

$$x' = -x + y + 2xy\,, \quad y' = -4x - y + x^2 - 3y^2$$

(a) Visa att $(0,0)$ är en kritisk punkt;
(b) Visa att systemet är lokalt linjärt kring $(0,0)$;
(c) Diskutera stabilitet hos $(0,0)$.

Lösning. (a) Gör själv.

(b) Vi kan skriva systemet som

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Om vi använder polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ så kan vi skriva

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2 cos\theta \sin\theta \\ r^2\cos^2\theta - 3r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} = r^2\bar{v}(\theta)$$

och

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\bar{u}(\theta)$$

där $\bar{u}(\theta)$ har längd 1. Detta betyder att

$$\frac{||\bar{g}||}{||\bar{x}||} = r||\bar{v}(\theta)||$$

vilket går mot noll då r går mot noll eftersom $||\bar{v}(\theta)||$ är begränsad.

(c) Vi tittar på egenvärdena till matrisen och jämför med [BD13, Theorem 9.3.2]. Egenvärdena är $-1 \pm 2i$ och eftersom realdelen är negativ har vi en asymptotiskt stabil spiralpunkt.

Boyce–DiPrima 9.3.7. Givet systemet

$$x' = 1 - 2y\,, \quad y' = x^2 - y^2$$

(a) Hitta alla kritiska punkter;
(b) Hitta motsvarande linjära system för varje kritisk punkt;
(c) Diskutera stabilitet hos varje kritisk punkt;

Lösning. (a) De kritiska punkterna är $(1/2, 1/2)$ och $(-1/2, 1/2)$. För varje kritisk punkt (x_0, y_0) kan vi göra ett koordinatbyte så att den kritiska punkten hamnar i origo:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Det nya systemet blir då (med $x_0 = \pm 1/2$ och $y_0 = 1/2$)

$$u' = 1 - 2(v + y_0)\,, \quad v' = x^2 - y^2$$

vilket kan skrivas som

$$\bar{u}' = \begin{pmatrix} 1-2y_0 \\ x_0^2 - y_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2x_0 & -2y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

där den första vektorn är noll.

(c) Egenvärdena till matrisen blir $-1/2 \pm i\sqrt{7}/2$ för $x_0 = 1/2$ vilket betyder att $(1/2, 1/2)$ är en asymptotiskt stabil spiralpunkt. Egenvärdena till matrisen blir 1 och -2 för $x_0 = -1/2$ vilket betyder att $(-1/2, 1/2)$ är en sadelpunkt (instabil).

3. Populationsdynamik

Boyce–DiPrima 9.4.4. Givet systemet

$$x' = x(1,5 - 0,5x - y)\,, \quad y' = y(1 - y - 0,125x)$$

(a) Skissa riktiningsfältet;
(b) Hitta kritiska punkter;
(c) Skriv ner motsv. linjära system för varje kritisk punkt och klassificera varje punkt och diskutera stabilitet;
(d) Skissa banor i närheten av varje kritisk punkt.

Lösning. (a) Gör själv.

(b) De kritiska punkterna är $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,0)$ och $(4/3, 5/6)$.

(c) Vi linjäriserar kring varje kritisk punkt:

(0,0): Använd polära koordinater för att kolla att $||\bar{g}||/||\bar{x}|| \to 0$ då $\bar{x} \to (0,0)$. Egenvärdena till matrisen är 1 och $3/2$ vilket betyder att vi har en nodal källa (instabil).

(0,1): Koordinatbytet $z = y - 1$ ger systemet

$$\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5x^2 - xz \\ -1/8xz - z^2 \end{pmatrix}.$$

Egenvärdena till matrisen är då -1 och $1/2$ vilket betyder att vi har en sadelpunkt (instabil).

(3,0): Koordinatbytet $w = x - 3$ ger systemet

$$\begin{pmatrix} w' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -3 \\ 0 & 5/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix} + \bar{g}(w, y)\,.$$

Egenvärdena till matrisen är då $5/8$ och $-3/2$ vilket betyder att vi har en sadelpunkt (instabil).

(4/3,5/6): Koordinatbytet $u = x - 4/3$, $v = y - 5/6$ ger systemet

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/6 & -4/3 \\ -5/48 & -5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \bar{r}(u, v)\,.$$

Egenvärdena till matrisen är då $-3/4 \pm \sqrt{21}/12$ vilka båda är negativa (Visa själv!). Detta betyder at vi har en nodal sänka (asymptotiskt stabil).

References

[BD13] William E. Boyce and Richard C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 10th ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 2013.