ÖVNING 1 - DIFFTRANS DEL 2

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Laplacetransformen

Boyce–DiPrima 6.1.22. Beräkna Laplacetransformen av

$$f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \le t < 3 \\ 0\,, & 3 \le t < \infty\,. \end{cases}$$

Lösning. Vi har att

$$\frac{d}{dt}\left(te^{-st}\right) = \frac{-1}{s}\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right) - ste^{-st}$$

vilket ger att

$$te^{-st} = -\frac{1}{s}\frac{d}{dt}\left(te^{-st}\right) - \frac{1}{s^2}\frac{d}{dt}\left(e^{-st}\right)\,.$$

Därför får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt &= \int_0^3 e^{-st}f(t)dt \\ &= \left[-\frac{t}{s}e^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^3 \\ &= \frac{1-(3s+1)e^{-3s}}{s^2}\,.\end{aligned}$$

2. Lösningar till BVP

Vi kan lösa vissa differentialekvationer med hjälp av Laplacetransfromen genom att att först tranformera hela ekvationen och hitta Laplacetrandformen av den sökta funktionen och sedan ta inversa Laplacetransformen för att hitta den sökta funktionen.

Boyce–DiPrima 6.2.3. Hitta inversa Laplacetransformen av

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 3s - 4}\,.$$

Lösning. Eftersom vi vet att Ce^at är inversa Laplacetransformen av

$$\frac{C}{s-a}$$

vill vi skriva $F(s)$ som en summa av termer på denna form. Vi faktoriserar

$$s^2 + 3x - 4 = (s+4)(s-1)$$

och ansätter

$$F(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-1}\,.$$

Om vi skriver detta med gemensam nämnare får vi ekvationen

$$A(s-1) + B(s+4) = 3$$

vilken har lösning $A = -3/5$, $B = 3/5$ och vi får att

$$F(s) = \frac{9}{5}\left(\frac{-1}{s+4} + \frac{1}{s-1}\right)$$

vilket har invers Laplacetransform

$$\frac{9}{5}\left(e^t - e^{-4t}\right)\,.$$

Boyce–DiPrima 6.2.13. Lös BVP

$$y'' - 2y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$$

Lösning. Vi har

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(t)\,,\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 2y\} &= (s^2 - 2s + 2)\mathcal{L}\{y\} + (-s+2)y(0) - y'(0)\\ &= ((s-1)^2 + 1)\mathcal{L}\{y\} + 1 - s\,.\end{aligned}$$

Dvs

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\,,$$

vilket har invers Laplacetransform $y(t) = e^t \cos t$.

3. Stegfunktioner

Vi definierar *stegfunktionen* $u_c(t)$ genom

$$u_c(t) = \begin{cases} 0\,, & t < c\\ 1\,, & t \geq c\,.\end{cases}$$

Denna har Laplacetransform $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$.

Boyce–DiPrima 6.3.6. Skissa grafen till funktionen

$$g(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)\,.$$

Lösning. Vi har att

$$g(t) = \begin{cases} 0\,, & 0 \le t < 1 \\ t-1\,, & 1 \le t < 2 \\ 3-t\,, & 2 \le t < 3 \\ 0\,, & t \ge 3\,. \end{cases}$$

Boyce–DiPrima 6.3.19. Hitta inversa Laplacetransformen till

$$F(s) = \frac{3!}{(s-5)^4}\,.$$

Lösning. Om $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existerar för $s > a \ge 0$ så har vi

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c)\,.$$

Dessutom vet vi att

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

För att byta s mot $s-5$ måste vi då mutliplicera med e^{5t} och vi får

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{5t}t^3\,.$$

4. Impulsfunktioner

Boyce–DiPrima 6.5.2. a) Lös följande BVP

$$y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

b) Skissa lösningen.

Lösning. LT av ekvationen ger

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}\,,$$

och vi får

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+2^2} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+2^2}\,.$$

Inversa LT av $1/(s^2+2^2)$ är $(\sin 2t)/2$ och om $f(t)$ har LT $F(s)$ så har $u_c(t)f(t-c)$ LT $e^{-cs}F(s)$. Sammantaget får vi att

$$y(t) = \frac{1}{2}(u_\pi(t)\sin 2(t-\pi) - u_{2\pi}(t)\sin 2(t-2\pi))$$

och eftersom $\sin t$ är 2π-periodisk kan detta förenklas till

$$\frac{1}{2}(u_\pi(t) - u_{2\pi}(t))\sin 2t\,.$$

b) Gör själv!

5. Faltningsintegraler

Givet två funktioner $f(t)$ och $g(t)$ så definierar vi deras *faltning* som

$$\begin{aligned}(f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\,.\end{aligned}$$

Vi har att

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}\,.$$

Operationen $*$ har följande egenskaper:

(1) Kommutativ;
(2) Distributiv;
(3) Associativ;
(4) $f * 0 = 0 * f = 0$, för alla funktioner f.

(observera att vi här bara tillåter funktioner $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$).

Boyce–DiPrima 6.6.14. Lös BVP

$$y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

Lösning. Tag LT av ekvationen för att få

$$(s^2 + 2s + 2)\mathcal{L}\{y\} - 1 = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}\,.$$

Höger leded har invers LT $\sin \alpha t$ och vi har att

$$(s^2 + 2s + 2)^{-1} = ((s+1)^2 + 1)^{-1}$$

har invers LT $e^{-t}\sin t$. Eftersom

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}\left(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} + 1\right)$$

får vi då at

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin(t-\tau)\sin(\alpha\tau)d\tau + e^{-t}\sin t\,.$$

Boyce–DiPrima 6.6.27. Givet följande BVP

$$\phi'(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (t-\xi)^2\phi(\xi)d\xi = -t\,, \quad \phi(0) = 1\,,$$

a) Lös mha Laplacetransformen;
b) Derivera ett antal gånger för att få en differentialekvation utan integraler;
c) Lös det nya BVP och kolla att svaret blev detsamma som i a).

Lösning. a) Om vi tar LT av ekvationen får vi

$$s\mathcal{L}\{\phi(t)\} - \phi(0) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{t^2\}\mathcal{L}\{\phi(t)\} = -\mathcal{L}\{t\}$$

vilket ger att

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\} = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Inversa LT ger nu

$$\phi(t) = \cos t\,.$$

b) Derivering ger

$$\begin{aligned}
&\phi''(t) - \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = -1 \\
&\phi'''(t) - \int_0^t \phi(\xi)d\xi = 0 \\
&\phi''''(t) - \phi(t) = 0\,.
\end{aligned}$$

Detta kan du se genom att

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(f*g)\right\} = sF(s)G(s)\,,$$

vilket betyder att

$$\frac{d}{dt}(f*g) = \frac{d}{dt}(f)*g\,.$$

Vi får fler begynnelsevärden genom att sätta in $t=0$ i de olika ekvationerna. Den ursprungliga ekvationen ger $\phi'(0)=0$, nästa ekvation ger $\phi''(0)=-1$, och nästa $\phi'''(0)=0$.

c) Denna kan lösas med ansatsen $\phi(t)=e^{at}$ vilket insatt i ekvationen ger $a^4-1=0$, dvs $a\in\{1,-1,i,-i\}$. Superposition ger att en allmän lösning kan skrivas

$$\phi(t) = Ae^t + Be^{-t} + C\sin t + D\cos t\,.$$

Vi har 4 begynnelsevärden och om vi sätter in dessa får vi ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

vilket har lösning $A=B=C=0$ och $D=1$. Dvs $\phi(t)=\cos t$.

References