ÖVNING 2 - FOURIERSERIER

ERIC AHLQVIST

Contents

1. Introduction

Vretblad 4.4. Hitta Fourierserien till den 2π-periodiska funktionen

$$f(t) = t + 1\,, \qquad \text{för } |t| < \pi\,.$$

Lösning. Om $g(t) = t$ så gäller att

$$g(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

så har vi

$$f(t) \sim 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}\,.$$

Eftersom funktionen g är udda så blir alla cosinus-koefficienter noll. Vi har att sinus-koefficienterna ges av

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{n}(\cos(nt) - \frac{d}{dt}(t\cos(nt)))dt \\ &= \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nt) - t\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{-2\cos(n\pi)}{n} \\ &= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,. \end{aligned}$$

Fourierserien blir då

$$f(t) \sim 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nt)\,.$$

Vretblad 4.9. Hitta Fourierserien till den 2π-periodiska funktionen som är

$$f(t) = e^{-|t|}\,, \qquad \text{för } |t| < \pi\,.$$

Lösning. Observera först att f är en jämn funktion. Därför har vi

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

där

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\cos(nt)dt\,.$$

Vi har

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{(in-1)t} + e^{-(in+1)t}\right)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(in-1)t}}{in-1} - \frac{e^{-(in+1)t}}{in+1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[e^{-t}\frac{e^{int}(in+1) - e^{-int}(in-1)}{-(n^2+1)}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{-1}{\pi}\left[e^{-t}\frac{e^{int} + e^{-int}}{n^2+1}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi(n^2+1)}\left(1 - (-1)^n e^{-\pi}\right)\,.
\end{aligned}$$

Fourierserien är därför

$$f(t) \sim \frac{1 - e^{-\pi}}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n e^{-\pi}}{n^2+1}\cos(nt)\,.$$

2. Fourierserier för deriverbara funktioner

Vretblad 4.15. Bevisa följande förbättring av Sats 4.4 is Vredblad: *Om $f \in C^k(\mathbb{T})$ så gäller att*

$$\lim_{n\to\pm\infty} n^k c_n = 0\,.$$

Lösning. Vi har $c_n(f^{(k)}) = i^k n^k c_n(f)$. Av Lemma 4.1.2 har vi att $|c_n(f^{(k)})| \to 0$ då $|n| \to \infty$. Dvs

$$|i^k n^c_n| = |n^k c_n| \to 0 \text{ då } |n| \to \infty\,.$$

3. Punktvis konvergens

Vretblad 4.20. Funktionen f har perioden 2π och uppfyller

$$f(t) = \begin{cases} t + \pi\,, & -\pi < t < 0\,, \\ 0\,, & 0 \le t \le \pi\,. \end{cases}$$

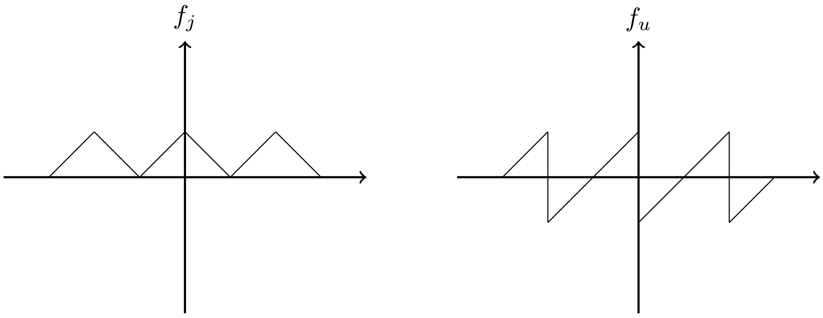
a) Hitta Fourierserien till f.
b) Beräkna summan

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)^2}\,.$$

Lösning. Skriv f som

$$f = \frac{1}{2}(f_j + f_u)$$

där f_j är en jämn funktion och f_u en udda funktion.



där

$$f_j(t) = \begin{cases} t+\pi\,, & -\pi < t < 0\,, \\ -t+\pi\,, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

och

$$f_u(t) = \begin{cases} t+\pi\,, & -\pi < t < 0\,, \\ t-\pi\,, & 0 \le t \le \pi\,. \end{cases}$$

Fourierserierna har formen

$$\begin{aligned} f_j(t) &\sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \\ f_u(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)\,. \end{aligned}$$

Låt

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_j(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-t+\pi)\cos(nt)dt \\ J_n^1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(t+\pi)\sin(nt)dt \\ J_n^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt\,. \end{aligned}$$

Då har vi $a_n = I_n$ och $b_n = J_n^1 + J_n^2$. Detta ger $a_0 = \pi$. För $n > 0$ har vi

$$\begin{aligned} t\cos(nt) &= \frac{1}{n}\left(\frac{d}{dt}(t\sin(nt)) - \sin(nt)\right) \\ t\sin(nt) &= \frac{1}{n}\left(-\frac{d}{dt}(t\cos(nt)) + \cos(nt)\right) \end{aligned}$$

och vi får

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi}\left[t\sin(nt) - \frac{1}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2} \end{aligned}$$

vilket kan skrivas

$$a_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$$

och på liknande sätt beräknar vi

$$b_n = -\frac{2}{n}\,.$$

Sammantaget får vi nu att

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)t)}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n}.$$

Om vi sätter $t = 0$ ger detta att

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

eftersom Sats 4.5 i Vretblad ger att Fourierserien till $f(t)$ konvergerar mot $(0+\pi)/2$. Alltså har vi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Fourierserier på andra intervall

Vretblad 4.23a). Bestäm Fourierserien til den jämna funktionen f med period 2 som uppfyller $f(t) = t$ för $0 < t < 1$.

Lösning. Låt $g(t) = f(t/\pi)$. Dvs

$$g(t) = \begin{cases} t\,, & 0 < t < \pi \\ -t\,, & -\pi \leq t \leq 0\,. \end{cases}$$

Funktionen g har period 2π och $f(t) = g(\pi t)$. Därför har vi

$$f(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z} c_n e^{in\pi t}}$$

där

$$c_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)e^{-in\pi t}.$$

Eftersom f är jämn har vi

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi t)$$

där

$$a_n = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt\,.$$

För $n \neq 0$ får vi då

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$