

Seminarieuppgifter 11

Linjär algebra, del 3

Problem 1

Från punkten $P = (2, -3, 1)$ dras normalerna till de båda planen Π_1 och Π_2 som har ekvationerna $x - y + 5z = 4$ och $y - 2z = 9$. Ett plan Π_3 innehåller de båda normalerna. Bestäm skärningspunkten mellan Π_1 , Π_2 och Π_3 . (ON-system.)

Svar: Skärningspunkten är (____, ____, ____).

Problem 2

Låt R vara vridningen $\frac{\pi}{12}$ runt x -axeln (moturs i det positivt orienterade ON-systemet).

(a) Bestäm avbildningsmatrisen A för R .

(b) Bestäm A^{24}

$$\text{Matrisen } A = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrisen } A^{24} = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

- SVÅRARE UPPGIFT, kommer ej som bonusuppgift på tentan -

Problem 3

Låt V vara mängden av alla vektorer i rummet, låt $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en positivt orienterad ON-bas i rummet, sätt $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, och definiera den linjära avbildningen F på V genom att sätta

$$F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\mathbf{a} \times \mathbf{v})$$

för alla $\mathbf{v} \in V$. Bestäm matrisen A för F i basen $\mathbf{e}$. Motivera också att det för varje given vektor $\mathbf{u} \in V$ finns en entydigt bestämd vektor $\mathbf{v} \in V$ sådan att

$$\mathbf{v} + (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}.$$

Bestäm också denna entydigt bestämda vektor $\mathbf{v}$ om $\mathbf{u} = 7 \cdot \mathbf{e}_1 + 6 \cdot \mathbf{e}_2 + 6 \cdot \mathbf{e}_3$.

$$\text{Matrisen } A = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

Den entydigt bestämda vektorn $\mathbf{v} = _ \mathbf{e}_1 + _ \mathbf{e}_2 + _ \mathbf{e}_3$.

- SVÅRARE UPPGIFT, kommer ej som bonusuppgift på tentan -

Problem 4

Bestäm matrisen A för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som definieras av att vektorn u först avbildas på $v \times u$ där $v = (-9, 2, 9)$ och sedan speglas i planet $x = z$, (positivt orienterat ON-system). Bestäm också determinanten till A .

$$\text{Matrisen } A = \begin{bmatrix} _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \\ _ & _ & _ \end{bmatrix}$$

Determinanten av A är lika med $_$.

Problem 5

Vi betraktar två speglingar i linjer i planet. Den första, S_0 , är speglingen av planets punkter i x -axeln. Den andra, S , är speglingen av planets punkter i en linje som går genom origo och bildar vinkeln $\pi/18$ med x -axeln. Beräkna matrisen A för S_0 och matrisen B för S . (ON-system.)

$$\text{Matrisen } A = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$\text{Matrisen } B = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}$$

Kommuterar S_0 och S ?

Svar: _____ (Svara med "JA" eller "NEJ".)

- SVÅRARE UPPGIFT, kommer ej som bonusuppgift på tentan -

Problem 6

Bestäm determinanten av matrisen för den linjära avbildning $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som definieras av att $F(v)$ bildas genom att först v avbildas på $v \times u$, för vektorn $u = (3, 2, 9)$, sedan speglas denna kryssprodukt i planet $x + 6y + z = 0$, sedan projiceras denna spegelbild på planet $z = 7y$, och till sist vrids denna projektion vinkeln $\pi/2$ runt linjen $x = 3y = 6z$ (Du kan själv bestämma åt vilket håll vridningen sker). (Positivt orienterat ON-system.)

Svar: Determinanten är lika med _____.

Problem 7

Givet en bas e_1, e_2 i planet, definiera en linjär avbildning F av planet på sig själv genom villkoren $F(e_1) = 2 \cdot e_1 + e_2$ och $F(e_2) = e_2$. Definiera därefter en följd $u_1, u_2, u_3, \dots$ av vektorer i planet genom att sätta $u_1 = 3 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2$ och $u_{n+1} = F(u_n)$. Ange en formel för u_n som funktion av n .

Svar: $u_n = \text{---} e_1 + \text{---} e_2$.

Problem 8

Bestäm matrisen A för den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som definieras av att man först speglar i planet $4 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 0$ och sedan projiceras ner på planet $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0$. (Positivt orienterat ON-system)

$$A = \begin{bmatrix} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{bmatrix}.$$

Problem 9

Bestäm talen a , b och c i matrisen nedan så att kolonnerna utgör en ON-bas.

$$\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & -11 & a \\ 10 & b & c \end{pmatrix}.$$

Svar: $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$ och $c = \underline{\hspace{1cm}}$.